万物の世界を算術で化学する

Ver.1.0.0

鹿島　長次

(2017.12)

目次

1.　まえがき 3

人類だけに理解できる数の概念 3
十進法と十二進法と二進法 5
円周率 7

2.　万物の基になる原子の横顔 11

数に意味を与える単位 11
原子の種類 13
原子の寸法 17
原子の重さ 20
原子の密度 21
原子と太陽系の比較 24
原子の色変わり 28
原子の性質 31
原子の総数 35

3.　万物を形作る分子の種類の数 40

共有結合の数と繰り返し 40
炭素化合物の異性体は無限 43
寿限無のように長い化合物名 47
20 進法できまる蛋白質の性質 51
4 進法で記憶される生物の情報 57

4.　万物を複雑に変化させる速さ 63

化学反応の基本も出会いと別れ 63
太古の昔から発し続ける放射能 65
福島原発事故のその後 69
去る者は A 子さんでも日日に疎し 73
恋愛の成就を困難にする高い障害 76
化学反応を利用した時計 81
化学反応を利用した色信号 84
溶け易さが温度で変わらない食塩 88
化学反応を利用した温度計 92

5.　実験と算術で見えてくる世界 97

算術計算で見えてきた原子の実感 97
生命の複雑な反応を支える多くの物質 98
物質の安定性が反映する反応の様相 101
中国哲学で予想した宇宙の限界 103

索引 105

1.まえがき

人類だけに理解できる数の概念

子供達は小学校に入学しますと、最初の 1〜2 週間で数の概念と数字を教えられます。数の概念は算数、数学、自然科学、哲学の根本となるもので、人類以外の生物にははっきりとは理解できない極めて難しい内容を含んでいるように思いますが、この難しい抽象的な概念を全く学問的な素養の無い小学生に理解させるための努力をされている小学校の先生に心から敬意を表したく思います。小学生は続いて、3 つのリンゴと 4 つの蜜柑を併せて果物の数を数える例を挙げて「たしざんとは、かずとかずをあわせることをいいます」と教えられ、7 つの果物の中から 3 つのリンゴを食べて残った蜜柑の数を数える例を挙げて「ひきざんはかずからかずをなくすことをいいます」と教えられます。

例えば、最も手近にある 3 人の指を使って指折り数えますと、この 30 本の指折勘定は 10+10+10=30 と足し算の式で表すように一年生のときには教えられますが、二年生になりますと九九の暗記とともに、掛け算が同じ数の足し算の繰返しで、割り算が同じ数の引き算を繰り返す算術と教えられ、それぞれ 10×3=30 と 30÷10=3 の式で表すように教えられます。小学校ではこの四則演算を基礎から応用まで教えていますが、高校まで進学しますと同じ数を繰り返し掛け合わせる算術を指数関数として 2x10x10x10=2000 のように教えられます。この時、10 に相当する掛け算の乗数を底、3 に相当する繰り返しの数を指数と呼んで底の右に上付きの数字で $2x10^3$ のように表示します。10 に 2 を足し合わせても 12 にしかなりませんが、10 と 2 の掛け算は 10 を 2 回足し合わせたものですから 20 になります。さらに、10 を 2 回かけ合わせますと 10^2 のような指数関数で表示され、9 回かけ合わせますと 10^9 のような指数関数で表示されますから、指数としては 2 から 9 にわずかに大きくなったに過ぎませんが、意味する数がそれぞれ 100 から 1000000000 に飛躍的に大きくなります。指折り数えては 1 回の掛け算でも指が足りなくなりますから、この掛け算を繰り返す指数関数では非常に大きな数となりもはや実感することがかなり困難です。逆に 10 から 2 を引けば 8 ですが、10 割る 2 の割り算は 10 から 2 を引く回数ですから 5 となります。さらに、10 で 2 回割り算しますと 10^{-2} に、10 で 9 回割り算しますと 10^{-9} のように負の指数を用いた指数関数で表示され、意味する数はそれぞれ 0.01 から 0.000000001 に飛躍的に小さくなります。このように繰り返しの足し算と引き算はそれぞれ掛け算と割り算ですが、繰り返しの掛け算と割り算は指数がそれぞれ正と負の指数関数で表されますから、その関数が意味する値は指数の変化を大きく増幅します。指数の絶対値が小さい場合にはその関数は限りなく 1 に近い値を持ちますが、非常に大きな指数の指数関数は無限に大きな数字を表しますし、指数に負の数を用いますと無限に小さな数字も表します。

例えば地球を取り巻く宇宙が誕生したのは約 15000000000 年前と考えられますし、地球が誕生したのは約 4500000000 年前と見積もられていますが、0 が連なっていて読み難いで

すから、指数関数を使ってそれぞれ $1.5x10^{10}$ 年と $4.5x10^{9}$ 年と表します。同じように地球上における生物の誕生は $3.8x10^{9}$ 年、生物の海中から陸上への上陸は $4x10^{8}$ 年、人類らしき先祖への進化は $6x10^{6}$ 年、文明社会の発祥は $7x10^{3}$ 年と推定されています。また、世界の主要10か国の人口は中国が $1.373x10^{9}$ 人、インドが $1.293\ x10^{9}$ 人、アメリカ合衆国が $3.22\ x10^{8}$ 人、インドネシアが $2.55\ x10^{8}$ 人、ブラジルが $2.04\ x10^{8}$ 人、パキスタンが $1.90x10^{8}$ 人、ナイジェリアが $1.79x10^{8}$ 人、バングラデシュが $1.60\ x10^{8}$ 人、ロシアが $1.43\ x10^{8}$ 人、日本が $1.27\ x10^{8}$ 人で、その他の国々を加えて全世界の人口は約 $7.276\ x10^{9}$ 人と集計されていますが、米国勢調査局と国連データの統計資料から世界の人口は1分間に137人ずつ増加していると考えられており、この原稿を記述している2017年1月19日15時には7376419721人と推計されています。大量虐殺や核戦争や大飢饉などの不幸なことが起こらなければ、約1年9ヶ月経過しますと日本の総人口に相当する $1.27\ x10^{8}$ 人以上の人口が世界中で増加すると考えることができます。

指数関数は同じ数の掛け算を繰り返す算術ばかりでなく、同じ数の割り算を繰り返す算術も $10^{-3}=1\div10\div10\div10=0.001$ のように負の指数を用いた指数関数で表します。1に8を9回かけ合わせた $1x8^{9}$ は非常に大きな $1.3x10^{8}$ になりますが、逆に1を8で9回繰り返し割り算しますと $1x\ 8^{-9}$ は0.00000000745となり $7.45x10^{-9}$ と指数関数で表されます。このように割り算を繰り返す指数関数は非常に小さな数となりもはや実感することがかなり困難です。アメリカ大リーグの野球で活躍しているイチローの2001~2017年の間の打撃成績は9885打数3080安打ですから、打率が0.312と算出され指数関数では $3.13x10^{-1}$ と表されますが、小数点以下の0の数が少ないために比較的に実感し易く、通常の少数による表示が適当で、反って指数関数での表示が煩雑で不便に感じられます。

日本は永年にわたりゼロ金利政策がとられていますから、銀行の預金金利も非常に低く抑えられています。2017年の日本の大手銀行の預金金利は利率の高い定期預金でも0.0001に、普通預金では0.00001に設定されています。この普通預金の金利は小数点以下に沢山の0が続いており、指数関数で $1x10^{-5}$ と表す方が適当に思われます。実際、100万円（$¥1x10^{6}$）の預金額に付く利息は1年間に $¥1x10^{6}x1x10^{-5}=1x10^{1}$=10円ですから、全く利息が無いように感じられ、銀行預金の有難味が実感できません。金利が指数関数で表されるような世の中では、日本人が永年築き上げてきた働き者の蟻さんを模範とする考え方も刹那を楽しむキリギリスさんを模範とするように変わってくるように思います。

著者の家には昔から約72秒間に100回と約60秒間に4回振れる2つの振り子時計がありますから、それぞれの振り子の1回の振動は0.6秒と15秒と算出されます。水晶の結晶は電圧を加えますと結晶が変形し、ある特定の周波数で電流を誘起する特性を持っています。この水晶の圧電効果を利用した水晶振動子から誘起された電流の信号を電気的に処理して時刻を表示するクォーツ時計が1980年代に普及しました。現在、広く用いられている水晶振動子の振動数は32768Hz（$=2^{15}$Hz）ですから、1回の振動は約0.0000305176秒です。誤差が1月に15~ 30秒程度の非常に正確な時間を刻むこの水晶

振動子の 1 回の振動時間は多くの 0 が並んでいますから、指数関数で 3.05176×10^{-5} 秒と表記した方が適切と思います。

表 1-1　スポーツ振興くじの当籤模様

一致試合数	当籤口数	含予想確率	無作為確率	予想効果
14	1	2.061×10^{-7}	2.091×10^{-7}	-0.01
13	27	5.565×10^{-6}	5.854×10^{-6}	-0.05
12	384	7.915×10^{-5}	7.610×10^{-5}	0.04
11	2952	6.085×10^{-4}	6.088×10^{-4}	0.00
10	16343	3.369×10^{-3}	3.349×10^{-3}	0.01
9	64948	1.339×10^{-2}	1.339×10^{-2}	0.00

2001 年に発売の開始されたスポーツ振興くじ(通称 toto)はプロサッカーの J-1 リーグの試合が勝ちか負けか引き分けかの結果を当てる賭博まがいの籤です。2016 年のシーズン初日の J-1 全 14 試合のそれぞれ 1 試合の結果が 3 通りですから、籤の無作為の当籤の確率は $3^{-14}=2.09 \times 10^{-7}$ となりますが、この時の籤の総数 4851540 口の中から試合結果との完全一致により当籤金 600000000 円の配当された 1 等が 1 口ありましたので、実際の当籤確率は 2.06×10^{-7} となりました。同時にこのスポーツ振興くじには 14 試合中 13 試合一致した 2 等、12 試合一致した 3 等、11 試合一致した 4 等、10 試合一致した 5 等まで用意されていますので、表 1-1 にその結果をまとめて掲げます。特に優れた技術や才能を持つ選手も含まれていますから、J-1 のチームにより多少の実力や戦力に差があり、対戦前に試合の趨勢が多少予想でき、籤の当籤確率に効果を与えると考えられます。表 1-1 には籤の無作為の当籤の確率と実際の籤の結果を比較してをまとめましたが、予想効果が誤差範囲で 0 と見積もられ、1 等から 5 等まで 14 試合の予想がほとんど不可能と思われました。スポーツ振興くじは賭博の禁止されている日本国内でも、宝くじと同じように問題のない純然たる籤と考えられます。

文明が発達し世の中が複雑になりましたから、日常生活を取り巻く事柄にも足し算と引き算を繰り返すだけでなく、掛け算と割り算を繰り返す複雑な算術が必要になり、非常に大きな数や小さな数を表現する指数関数は避けて通ることのできない算術になってきました。ここで取り上げた指数関数は底も指数も比較的小さな -10~10 の数に限られていますが、大きな数を考えることができますから、無限に大きな数も小さな数も考えることができ、表現することができます。無限に大きな数も無限に小さな数もありうると思われます。

十進法と十二進法と二進法

最も手近にある 3 人の指を使って指折り数え、3 人の 10 本になりますから 30 本と容易に勘定でき、この 30 本の指折勘定が 10x3=30 と掛け算の式で表され、指の数を基本の単位とする十進法が自然発生的に生まれてきます。また、月の満ち欠けや潮の満ち干の

周期は 29.53 日で変化しますから 1 年間には約 12 回の周期になり、その変化に対応するように人間の体調も変化しますから、時間が 12 を基準とする 12 進法で表されています。

図1−1 算盤と計算尺

三国志の主役の一人の関羽が算盤を上手に利用したために、関羽が商売の神様として祀られている関帝廟には算盤が飾られていますが、この算盤は 2 世紀ごろに中国で完成された便利で手軽な計算するための道具です。図 1-1（A）に示す算盤は横桟の上段に 1 つ、下段に 4 つの上げ下げできる玉が 23 列に並ぶように作られています。古代中国から自然発生的に十進法が用いられてきましたから、上段の玉を 5 とし、下段の玉を 1 として指の代わりに玉の上げ下げで正確な数を記録し、23 列に並んだそれぞれの列が位取りを意味しています。ここに示した算盤では 0 から 10^{24} より小さな数まで記録でき、この記録を重ねてゆきますと足し算になり、消し去るように操作すれば引き算を簡単に勘定できますから、国家予算ほどに大きな数の足し算や引き算も可能になります。算盤は指先の操作を熟練すれば機械的に非常に速く足し算や引き算の演算が正確にできますから、1960 年代までは足し算と引き算は算盤を使って演算していました。掛け算は九九を計算して桁ごとに足し算する複雑な操作を必要としますので、珠算教室に通ったことのない著者は掛け算と割り算は手っ取り早くて簡単な筆算で計算していました。

算盤が掛け算と割り算に複雑な操作を要する欠点を補完するように理工学系の分野では計算尺が広く使われていました。式 1-1 と式 1-2 に示す対数と実数の関係を巧みに利用した計算尺は図 1-1(B)に示すようにカーソルと対数関数を目盛った固定尺と滑尺の 3 つの部品で構成されたもので、掛け算と割り算を足し算と引き算の形で簡単に演算する計算の道具です。しかし、1970 年代になり電子計算機が普及しますと、電子式卓上計算機が安価に簡便に利用できるようになりましたから、四則計算ばかりでなく指数計算なども即座に計算できるようになり、算盤も計算尺も過去の計算道具として次第に埋もれてゆきました。。

$$\log(a \times b) = \log a + \log b \qquad \text{式 1-1}$$

$$\log(a \div b) = \log a - \log b \qquad \text{式 1-2}$$

電子計算機は電流や電磁波の接続と断続や端子の電場の⊕と⊖や磁石の N と S などの 2 通りの差を単位として利用していますから、単位が 1 個では 2 通り、単位が 2 個では 4 通り、単位が 3 個では 8 通りの場合が作れます。例えば、電場の⊕と⊖を例にとれば、電場の単位が 1 個では⊕と⊖しか有りませんが、単位が 2 個並びますと⊕の次に⊖、⊖の次に⊕、⊕の次に⊕、⊖の次に⊖の 4 通りになります。単位が n 個では⊕と⊖の並び方は指数関数で表さ

れる 2^n 通りとなり、日常生活にあまり馴染のない二進法と考えられます。指数関数は繰り返しの回数が大きくなりますと飛躍的に大きな数になりますから、非常に小さな 2 を基にしても多くの繰り返しにより大きな数を作ることができます。

著者が初めて出会った電子計算機は 16Bit で作られていましたから、1 つの情報単位となる 1Byte は単位が 16 個で構成されており、1 つの情報単位には 2^{16} に相当する 65536 通りの情報しか持つことができず、この情報単位を 2 つまたは 4 つ組み合わせて 1 塊の情報単位としていました。しかしこの分野の知識も技術も格段に進歩しましたから、現在著者の手元にある電子計算機は 4 つの情報単位をあらかじめ 1 塊にした 64Bit が 1Byte になるように作られており、2^{64} が 18446744073709551616 ですから、1 つの情報単位となる 1Byte は 1.84×10^{19} 通りの中の 1 通りの情報を持つことができます。しかも、この電子計算機には情報保存用に約 1.56×10^{11}Byte が用意されていますから、約 2.9×10^{30} 通りの情報が保存できます。

円周率

「丸い卵も切りようで四角」は「物も言いようで角が立つ」と後に続き古くから言われてきた言葉ですが、ことわざ辞典(日東書院発行)では同じことでも話し方によって良くも悪くも受け取れると説明されており、丸と四角は対極的な形として捉えられています。18 世紀初頭まで哲学者や数学者や科学者としてばかりでなく政治家や外交官としても多才に活躍した Leibniz は接線を「無限に近い曲線上の二点を通る直線」と定義しています。この定義によりますと曲線上の一点から右に取った接線と左に取った接線のなす角は内角と考えられ、正 4 角形の頂点では 2 本の接線は同一直線にはならず内角が 90° になりますが、円周上では常に内角が限りなく 180° に近付き 2 本の接線が重なります。2 本の接線が角度を持つかか否かという点で四角と丸は明らかに対極的です。

3 角形の各辺の 2 乗の関係を示す Πυθαγόρας（ピタゴラス）の定理を用いますと、図 1-2 の青色で示す 1 辺の長さ ar の正 2n 角形と赤色で示す 1 辺の長さ b の正 4n 角形の対角線の交点(中心)と各頂点の間の長さを r とする時に、青実線の三角形の辺の関係を表す式 1-3 を代入して、赤実線の 3 角形の辺の関係が式 1-4 で表されますから、正 4n 角形の外周の長さ D は式 1-5 で表すことができます。正 2n 角形が正 6 角形のときには、隣り合う 2 つの頂点と中心でなす 3 角形は正 3 角形になりますから ar と D の値はそれぞれ r と 6r になります。この正 6 角形の ar の値を式 1-4 に代入すれば正 12 角形の b と D の値が求められます。ここで求められた正 12 角形の b を正 12 角形の ar とすると正 24 角形の b と D の値が求められます。この演算を繰り返すことにより正 48 角形や正 96 角形など無限

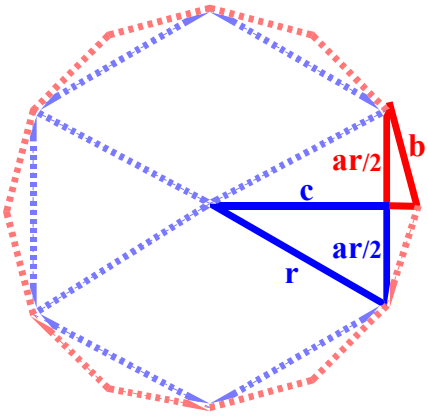

図1−2　正2n角形の外周の関係

に大きな正多角形の b と D と内角の値が求められますから表 1-2 に纏めて掲げます。

$$c = \sqrt{r^2 - \left(\frac{ar}{2}\right)^2} \qquad \text{式 1-3}$$

$$b = \sqrt{\left(\frac{ar}{2}\right)^2 + (r-c)^2} = r\sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}} \qquad \text{式 1-4}$$

$$D = 4nb = 4nr\sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}} \qquad \text{式 1-5}$$

正 4n 角形の n の値が大きくなるほど内角が 180°に近付き円に近い形になりますから、その D の値は表 1-2 に示すように円周に近くなり、円周と半径の比を意味する円周率πに $D/_{2r}$の値は近付きます。表 1-2 から円周率を 3 と近似することは正 6 角形を円と見なすことを意味しますし、3.14 とすれば円を正 48 角形以上の正多角形で近似することを意味します。円周率の桁数は数の正確さを示す有効桁数に相当しますから、円と見なすことのできる正多角形の近似の程度を表しています。1998 年に実施された小学校学習指導要領の不備から、円周率を有効桁数 1 桁の 3 として円周や円の面積を概算するように文部科学省が指導しましたが、このことは円を正 6 角形で近似することを意味していますから、「丸い卵も切りようで四角」のように直感的にかなり無理のある不自然なものでした。2008 年に正 48 角形を円と見なす「円周率は 3.14 とする」と学習指導要領が改定されて、内角が 172.5°とかなり 180°に近くなりますから感覚的に受け入れられる内容になりました。

表 1-2　多角形の周囲長と割合

正多角形	1 辺の長さ (a)	周囲の長さ (D/r)	周囲長との割合 (D/2r)	内角 (°)
6 角形	1.000000	6.000000	3.000000	120.00
12 角形	0.517638	6.211657	3.105829	150.00
24 角形	0.261052	6.265257	3.132629	165.00
48 角形	0.130806	6.278700	3.139350	172.50
96 角形	0.065438	6.282064	3.141032	176.25
192 角形	0.032723	6.282905	3.141452	178.13
384 角形	0.016362	6.283115	3.141558	179.06
768 角形	0.008181	6.283168	3.141584	179.53

円は無限に大きな正多角形と近似することができますから、円周率πを小さな誤差で求めることができます。式 1-5 を用いる近似計算では平方根の計算の繰り返しを要しますから、正多角形を限りなく円に近付けるためには複雑で膨大な計算をしなければなりません。現在の電子計算機の原型となるプログラム内蔵型電子計算機を開発した Neumann は、1949 年に 70 時間を費やして有効桁数 2038 桁（小数点以下 2037 桁)までの円周率を計算してその計算機の演算能力を証明しました。その後種々の近似法の導入や演算速度や記憶容量の増大などの計算機の性能向上により、2016 年には円周率は有効桁数 22459157718362 桁まで計算されています。ちなみに、有効桁数 36 桁（小数点以下 35 桁）の円周率πを式 1-6 に掲げておきます。

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950288 \qquad \text{式 1-6}$$

円周率を有効桁数3桁の3.14と近似した時の正48角形は内角が172.5°とかなり180°に近くなり、感覚的に円と見なすことができますし、円の面積や体積や円周の長さの誤差は0.88%に過ぎませんから、学習指導要領で指導する「円周率は3.14とする」は実質的な意味を満足しています。算出するためには高い演算費用を必要としますから、有効桁数20億桁を持つ円周率は哲学的には意味があるように思えますが、実用的には意味を全く持たない遊びとしか思えません。

前節で紹介した算盤は22桁の足し算や引き算を誤差なく演算できますから、有効桁数22桁の計算が可能な道具です。これに対して計算尺は3桁までしか目盛ってありませんから、有効桁数が3桁の計算しかできない道具です。はじめて市販された卓上計算機では有効桁数が8桁までしか演算できませんでしたが、現在広く普及している電子計算機は有効桁数19桁まで容易に演算できます。有効桁数が数の正確さあるいは近似の度合いを示す尺度ですから、演算を通して有効桁数の向上することはありませんが、電子計算機でも卓上計算機でも非常に大きな桁数の演算結果が表示されてしまいます。例えば、有効桁数1桁の円周率を用いた半径2.5cm(約1インチ)の円周の長さを計算機で計算しますと15と表示されますが、正6角形を円と見なしたに過ぎませんから、約15cmとしか見なすことができませんし、円周率3.14を用いますと15.7と計算機に表示され有効桁数を考慮しますと16cmとなります。有効桁数6桁の円周率を用いますと15.70795と計算機に表示されますが、有効桁数を考慮しますと同じく16cmとなり、小数点以下に無意味の数が並びます。このように計算機で演算しますと機械的に無用の数字まで連なってしまいますから、有効桁数を良く考慮して意味のある数字を拾い出さなければ、数字の幽霊が世の中を歩き回る事態を生じます。

物の長短や大小や多少を認識することは動物の本能で、フグやエリマキトカゲは大きく見せかけて敵を欺き身を守ります。しかし、この本能を数として表す数の概念は人類以外の生物にははっきりとは理解できない極めて難しい内容で、小学校に入学しますと子供たちが最初に学ぶ最も重要な抽象的概念です。手元に常に持ち歩いている指を使ってこの抽象的な概念を具象化してきましたから必然的に十進法が生まれましたが、指では沢山の人を集めても限りがあります。この限界を乗り越えて具象化するように算盤が発明され、想像が困難なほど大きな数も正確に認識できるようになりました。さらに近年になり電子計算機が普及しましたから、想像や体験で認識していた大きな数も小さな数も容易に取り扱うことができるようになりました。その結果日常生活の中に種々の数が氾濫し、非常に興味深い数に出会うこともできるようになりましたが、数に振り回されて誤った判断をするようなことも起こるようになりました。

普通預金の利息が0.001％も付きますから銀行に預金していれば老後は安心ととんでもない錯覚を持ちますし、全世界に人口が1分間に137人しか増加しないと安心していますが、1年9か月で日本の人口に相当する人が増えていると思うと怖くなります。柳葉敏郎がスポーツ振興くじ(toto)で起死回生の成功を夢見ていますが、新聞のスポーツ欄をよく読んでサッカーチームの強さを研究することが如何に空しいことか数の裏に潜む事実を見れば明ら

かになります。学習指導要領の方針の「円周率を有効桁数 1 桁にする」が正 6 角形を円と見なす乱暴な近似であったり、日常生活において「円周率は 3.14 とする」で実質的に十分と思われますが、有効桁数 20 億桁を持つ円周率を計算して誇らしげに遊ぶ研究者もいます。

このように日常生活の中に氾濫している数を良く調べてみると種々の事実が隠されていたり、興味深いことが現れてくることがあります。本書では物質の性質や変化に関わる数を調べて、隠れるように存在している興味深い合理性や自然の摂理などを独善的に考えてみようと思いました。化学の世界における数と物質の性質や変化との関わりを考えることにより、何か一つでも化学の研究や教育に役立つものが見つけ出せれば良いと思っております。また、物質の性質を示す数を考えることで日常生活を豊かにする助けになれば、本書はさらなる意義を持つことになると思われます。